הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

נושאים במתמטיקה - רענון

<u>יסודות באלגברה והנדסה אנליטית</u>

גב' דניאלה אבידן

I <u>הגדרות וסימונים ראשונים</u>

מספר שלם וחיובי נקרא מספר טבעי. נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים ב־ $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

א. <u>סכום:</u> נסמן את הסכום $a_1+a_2+\cdots+a_n$ על ידי $\sum_{i=1}^{n} a_i$. כאן a_i הוא המחובר הכללי, והאינדכס i מקבל כל ערך שלם מהגבול התחתון 1 ועד הגבול העליון n.
את אותו סכום נוכל להציג בכמה אופנים:

- $\sum_{j=1}^{n} a_j$. (כל אות או סמל, למשל i, j, t או β, יכול לשמש כאינדכס).
- $\sum_{k=7}^{9} a_k = a_7+a_8+a_9$. (הגבול התחתון לא חייב להיות 1).
- $\sum_{t=1}^{n} a_t = \sum_{\beta=4}^{n+3} a_{\beta-3}$. (ניתן לבטא את האינדכס ואת הגבולות ע"י ביטויים מורכבים יותר, ובתנאי שהסכומים מייצגים את אותם המחוברים. בדקו ששני הסכומים אכן מייצגים את אותו הביטוי: $a_1+\ldots+a_n$.

ב. <u>עצרת:</u> ל־ $n=0$ ולכל מספר טבעי n נגדיר את "n עצרת" אותו נסמן $n!$: עבור $n=0$ נגדיר $0!=1$ ועבור $n\geq 1$ נגדיר $n!=1\times2\times3\times\ldots\times n$.
שימו לב כי $(n+1)!=n!(n+1)$ לכל מספר טבעי n.
למשל $1!=1$ $\quad 2!=1\times2=2$ $\quad 3!=1\times2\times3=2!\times3=6$ $\quad 4!=3!\times4=24$.

<u>דוגמה:</u> הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n-1)!(n+1)}$.

<u>הוכחה:</u>

$$\frac{1}{(n-1)!(n+1)}+\frac{1}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{n}{\underbrace{1\times2\times\ldots\times(n-1)}_{(n-1)!}\times n\times\underbrace{(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}$$

מש"ל

ג. לכל שני מספרים שלמים $0\le k\le n$, <u>המקדם הבינומיאלי</u> מוגדר ע"י

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ (יש שני סימונים מקובלים שונים)

למקדמים הבינומיאליים יש משמעות קומבינטורית : יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור k עצמים מתוך n, ללא חזרות וללא חשיבות לסדר. למשל, יש $\binom{5}{3}=10$ שלשות מתוך $\{1,2,3,4,5\}$.

<u>תרגיל</u>: הראו כי המקדמים הבינומיאליים מקיימים

(1) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

(2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

(3) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

(4) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

ד. <u>משולש פסקל</u>: זהו סידור המקדמים הבינומיאליים בשורות. בשורה מס' n מופיעים $n+1$ המקדמים $\binom{n}{0},\dots,\binom{n}{n}$, וזאת לכל n טבעי או 0:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&\binom{0}{0}&&&&&\\
&&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&&\\
&&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&&\\
&&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&&\\
&\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}&\\
\binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5}\\
&&&&&\vdots&&&&&
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&&\\
&&&&1&&1&&&&\\
&&&1&&2&&1&&&\\
&&1&&3&&3&&1&&\\
&1&&4&&6&&4&&1&\\
1&&5&&10&&10&&5&&1\\
&&&&&\vdots&&&&&
\end{array}$$

במשולש ניתן להבחין היטב בתכונות שבתרגיל למעלה: (1) אומר שהמשולש סימטרי סביב ציר אנכי באמצע, (2) אומר שבצלעות מופיע תמיד המספר 1, (3) אומר שבאלכסונים שליד הצלעות מופיע n בשורה ה־ n־ית (כשהקודקוד נספר כשורה האפס), ו־ (4) אומר שכל מספר פנימי שווה לסכום שני שכניו מלמעלה (וזה נותן כלל פשוט מאוד לכתיבתו).

II <u>אינדוקציה המתמטית</u>

<u>עקרון האינדוקציה</u>: אם קבוצה A של מספרים טבעיים מכילה מספר מסוים n_0, ואם לכל n ב־ A מתברר שגם $(n+1)$ ב־ A, אז בהכרח A מכילה את $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$.

<u>הוכחה באינדוקציה</u>: אם $\mathcal{P}(n)$ טענה התלויה ב־ n, נכונותה תוכח לכל $n\ge n_0$ אם נוודא את שתי הטענות הבאות:

(i) (טענת הבסיס) הטענה $\mathcal{P}(n_0)$ נכונה.

(ii) (טענת המעבר)לכל $n\ge n_0$, אם ידוע שהטענה $\mathcal{P}(n)$ נכונה אז גם הטענה $\mathcal{P}(n+1)$ נכונה.

כדי לראות ששיטת ההוכחה באינדוקציה נובעת מעקרון האינדוקציה ניקח כקבוצה A את $A=\{n\in\mathbb{N} \mid \text{נכונה } \mathcal{P}(n)\}$.

III <u>הבינום של ניוטון</u>

"בינום" הוא דו איבר מהצורה $a+b$.

<u>נוסחת הבינום של ניוטון</u> לכל מספר טבעי n

$$(\dagger) \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

(השורה השניה היא רק כתיבה מפורשת של הראשונה).

<u>הוכחה:</u> (באינדוקציה).

(i) (טענת הבסיס) עבור $n=1$ $(a+b)^1 \stackrel{\checkmark}{=} a^1+b^1$.

(ii) (טענת המעבר) נניח ש־ $(\dagger)$ מתקיים, **וצריך להוכיח** שגם

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k \ .$$

ואכן, לפי הנחת האינדוקציה

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
$$= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

ונטפל תחילה בכל סכום בנפרד. נציג

$$a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k$$

כי המקדם של a^{n+1} הוא $\binom{n}{0}=1$. באופן דומה נקבל כי

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$
$$\stackrel{(i)}{=} \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^{n-(j-1)}b^j + b^{n+1}$$
$$\stackrel{(ii)}{=} \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

כאשר במעבר (i) שינינו את האינדכסים מ־ k, הנע בין 0 ל־$n-1$, לאינדכס j, הנע בין 1 ל־ n, אך לא שינינו בזאת את המחוברים עצמם,ואילו במעבר (ii) חזרנו מהאינדכס j לאינדכס k (מה שכמובן איננו משנה כלום) כדי שנוכל בהמשך להתייחס לשתי הנוסחאות בצורה אחידה.

כעת, כשחישבנו כל מחובר בנפרד, נחבר אותם ביחד ונשתמש בנוסחה (4) בעמוד השני: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$, ונקבל

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k+b^{n+1} \\
&= a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right\}a^{n+1-k}b^k \quad +b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}$$

מש"ל

(בידקו שאתם מבינים את כל המעברים, כולל את שינוי אינדכס הסכימה והשימוש בתכונות של המקדמים הבינומיאלים).

<u>תרגיל:</u> א. הוכיחו שאיברי השורה ה־ n־ית במשולש פסקל מסתכמים ל־ 2^n (כאשר הקודקוד נספר כשורה ה־ 0).

(i) באינדוקציה.

(ii) כמסקנה של נוסחת הבינום של ניוטון.

ב. מהו סכום איברי השורה ה־ n־ית כאשר מכפילים את איבריה בסימנים מתחלפים? נמקו! (למשל עבור $n=3$ הסכום הוא $1-3+3-1=0$).

IV <u>סדרות</u>

<u>סדרה:</u> סדרה היא קבוצה <u>מסודרת</u> של מספרים. היא יכולה להיות סופית $a_1,a_2,\ldots,a_m$ או אינסופית $a_1,a_2,\ldots$, והסימון אומר ש־a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, a_2 השני וכו'.

<u>סדרה חשבונית (אריתמטית):</u> סדרה שבה ההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא מספר קבוע d

$$a_{n+1}=a_n+d \qquad \text{לכל } n\,.$$

אם (a_n) היא סדרה חשבונית עם הפרש d, אז

(1) האיבר הכללי ניתן ע"י הנוסחה $a_n=a_1+(n-1)d$. ובאמת, נציג

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})\,.$$

הערך שבכל סוגר הוא d ויש $n-1$ סוגרים כאלה, ולכן אגף ימין הוא $a_1+(n-1)d$.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו את הנוסחה באינדוקציה.

(2) כל איבר הוא הממוצע של שני שכניו: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, כי עפ"י (1)

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} &= \frac{\big(a_1+(n-2)d\big)+\big(a_1+nd\big)}{2} \\ &= \frac{2a_1+(2n-2)d}{2} = a_1+(n-1)d = a_n \end{aligned}$$

(3) הסכום של n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית ניתן ע"י הנוסחה

$$S_n = a_1+\ldots+a_n = \frac{n}{2}\,\big(2a_1+(n-1)d\big)$$

וגם ע"י $S_n = n\,\frac{a_1+a_n}{2}$.

לפני שנוכיח את הנוסחה הכללית נסתכל במקרה הפרטי שבו $a_j = j$, כלומר בסכום $1+2+\ldots+n$, ונראה שסכומו הוא אכן $\frac{n(n+1)}{2}$. נסמן את הסכום ב־T_n ונציג אותו בשני אופנים

$$\begin{array}{lcccccccc} T_n = & 1 & + & 2 & +\cdots+ & (n-1) & + & n \\ T_n = & n & + & (n-1) & +\cdots+ & 2 & + & 1 \end{array}$$

כשנסכם את שתי השורות (ונחבר כל איבר בשורה הראשונה לאיבר שמתחתיו בשורה השניה) נקבל כי

$$2T_n = (n+1)+(n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)\ .$$

יש n ביטויים בסוגריים, ולכן $2T_n = n(n+1)$ ו־ $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ כמבוקש.

נעבור כעת למקרה הכללי

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &\overset{(i)}{=} \sum_{k=1}^{n}\big(a_1+(k-1)d\big) = na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) \\ &\overset{(ii)}{=} na_1 + d\sum_{j=1}^{n-1} j = na_1 + d\cdot T_{n-1} \\ &\overset{(iii)}{=} na_1 + d\,\frac{(n-1)\,n}{2} = n\left(a_1+\frac{(n-1)\,d}{2}\right) \end{aligned}$$

ובעזרת הנוסחה ל־ a_n מקבלים שגם $\frac{n}{2}\big(2a_1+(n-1)d\big) = n\,\frac{a_1+a_n}{2}$ כמבוקש.

הסברים: בשוויון (i) השתמשנו בנוסחה לאיבר הכללי, בשוויון (ii) בצענו שינוי אינדכס $j=k-1$; השארנו $j=1$ בתור גבול תחתון מכוון שהמקרה $j=0$ ממילא תורם 0 לסכום. בשוויון (iii) השתמשנו בנוסחה שפיתחנו עבור T_{n-1}. **מש"ל**

<u>סדרה הנדסית (גיאומטרית):</u> סדרה עם המנה קבועה q בין כל שני איברים עוקבים:

$$a_{n+1} = q\,a_n \qquad \text{לכל } n\,.$$

(אם $q=0$ או אחד ה־ a_n־ים מתאפס, אז כל ה־ a_n־ים מתאפסים. אין לנו ענין בסדרה הזו, ולכן נניח כי $q \neq 0$ ו־ $a_n \neq 0$ לכל n).

הנוסחאות הבאות אנלוגיות לנוסחאות המתאימות לסדרה אריתמטית. הוכיחו כתרגיל את שתיים הראשונות. נסמן ב־ (a_n) סדרה גיאומטרית עם מנה q.

$(1')$ **האיבר הכללי ניתן ע"י הנוסחה** $a_n = a_1\,q^{n-1}$.

$(2')$ $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$ **לכל** $n>1$.

$(3')$ **נסמן את סכום** n **האיברים הראשונים ב־** $S_n = a_1 + \cdots a_n$. **אז**

$$S_n = \begin{cases} a_1\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{אם } q\neq 1 \\ na_1 & \text{אם } q=1 \end{cases}\,.$$

<u>הוכחת 3':</u> ניתן להוכיח את הנוסחה באינדוקציה, אך גם בעזרת החשבון הקצר הבא:

$$(q-1)S_n = (a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^n) - (a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1}) = a_1(1-q^n)\,.$$

בשויון השני כל האיברים מלבד a_1q^n ו־ $-a_1$ מתקזזים. אם $q\neq 1$ הנוסחה תתקבל ע"י חלוקת האגפים ב־ $(q-1)$. אם $q=1$ הסידרה קבועה, ואכן $S_n = na_1$. **מש"ל**

<u>דוגמה:</u> נתונה סדרה גיאומטרית (a_n), וניצור סדרה חדשה $a_m, a_{m+d}, a_{m+2d}, \ldots$ ע"י דגימת הסדרה המקורית במרווחים שווים. נראה שגם הסדרה החדשה היא סדרה גיאומטרית, ונחשב את מנתה.

(למשל, אם $m=7$ ו־ $d=3$ מדובר בסדרה $a_7, a_{10}, a_{13}, \ldots$).

נרשום את הסדרה החדשה כ־ $(b_1, b_2, \ldots)$, כלומר $b_k = a_{m+(k-1)d}$. מהנוסחה $(1')$ נובע ש־

$$b_k = a_1q^{m+(k-1)d-1} = (a_1q^{m-1})(q^d)^{k-1}$$

ושוב מ־ $(1')$ נובע ש־ (b_k) סדרה גיאומטרית עם איבר ראשון $(\mathbf{a_1q^{m-1}})$ ומנה $(\mathbf{q^d})$.

<u>נוסחת פירוק:</u> נראה כי $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$.

(אתם מכירים נוסחה זו היטב עבור $n=2$. כאשר $n=3$ מתקבלת הנוסחה, המוכרת אף היא, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$).

<u>הוכחה:</u> הזהות בוודאי מתקיימת אם $a=0$ או אם $a=b$, ולכן נניח כי $a \neq b$ וכי $a \neq 0$.

הסכום בסוגריים הארוכים באגף ימין הוא סכום של n איברים בסדרה גיאומטרית עם איבר ראשון a^{n-1} ומנה $\frac{b}{a}$. על פי $(3')$ סכום זה שווה ל־

$$a^{n-1}\,\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1}{\frac{b}{a} - 1} = a^{n-1}\,\frac{\frac{b^a - a^n}{a^n}}{\frac{b-a}{a}} = \frac{b^n - a^n}{b-a}$$

וכשנכפיל ב־ $b-a$ נקבל $b^n - a^n$ כנדרש. **מש"ל**

<u>תרגיל:</u> הראו שלכל n טבעי $7^{2n} - 44^n$ אינו ראשוני.

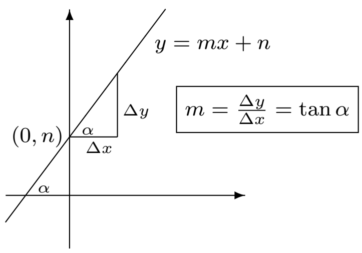
V <u>הנדסה אנליטית במישור</u>

נסמן נקודות במישור ע"י זוג מספרים (a,b) (שנקראים הקואורדינטות של הנקודה). לפעמים נרצה לקצר ונציין נקודות כאלה באות לטינית גדולה, למשל P,Q או A, ולפעמים, נשתמש בסימון $P(a,b)$ שנותן בבת אחת הן את השם P לנקודה והן את הקואורדינטות (a,b) שלה.

<u>משוואת הישר</u>

המשוואה של ישר במישור שאיננו אנכי, ושהוא בעל שיפוע m וחותך את ציר y בנקודה $(0,n)$, היא

$$y = mx + n \ .$$



נזכיר שהשיפוע m מתאר את היחס בין התוספת האנכית Δy לתוספת האופקית Δx שבין שתי נקודות כלשהן על הישר. הוא גם שווה ל־ $\tan\alpha$ כאשר α היא הזווית שבין החלק החיובי של ציר ה־x־ים לבין הישר.

<u>הערה:</u> ישר כללי מתואר ע"י $\boxed{ax+by=c}$ עבור קבועים מתאימים a,b,c כאשר a ו־ b אינם שניהם 0. אם $b \neq 0$ הישר אינו אנכי וע"י חלוקה ב־ b מתקבלת הנוסחה שלמעלה עם $m = -\frac{a}{b}$ ועם $n = \frac{c}{b}$. אם $b = 0$ זהו הישר האנכי $x = \frac{c}{a}$, כלומר y איננו מוגבל, והישר הוא אוסף כל הנקודות מהצורה $(\frac{c}{a}, y)$.

<u>טענה:</u> משוואת הישר ששיפועו m והעובר דרך הנקודה $P(x_0,y_0)$ היא

$$y = mx + (y_0 - mx_0)$$

כלומר $n = y_0 - mx_0$.

<u>הוכחה:</u> אם $Q(x,y)$ נקודה כללית על הישר, אז מתקיים $m = \dfrac{y-y_0}{x-x_0}$, וכאשר מחלצים מכאן את y מקבלים את המשוואה המבוקשת. **מש"ל**

<u>טענה:</u> השיפועים m_1, m_2 של שני ישרים ניצבים זה לזה (ולא מקבילים לצירים) מקיימים

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad \text{או באופן שקול} \qquad m_1 m_2 = -1 \ .$$

<u>הוכחה:</u> נסמן ב־α_1, α_2 את הזוויות שבין החלק החיובי של ציר ה־ x־ים לבין שני הישרים בהתאמה, ואז $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ ולכן

$$m_2 = \tan\alpha_2 = \tan\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1} \ .$$

(הנוסחה $(*)$ מוזכרת ומוכחת בפרק על פונקציות טריגונומטריות). **מש"ל**

<u>דוגמה:</u> מהי משוואת הישר שניצב ל־ $3y + 2x = -8$ ועובר דרך הנקודה $P(3,-1)$)?

לישר הנתון יש שיפוע $-\frac{2}{3}$, לכן שיפוע הישר המבוקש הוא $\frac{3}{2}$. על פי הנוסחה למשוואת הישר העובר דרך נקודה נתונה משוואתו היא

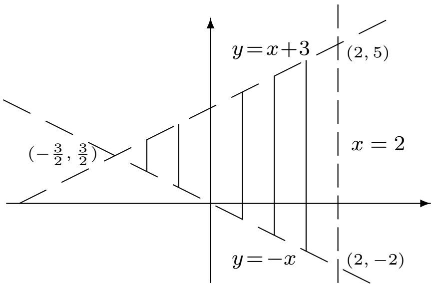
$$y = \frac{3}{2}x + \left(-1 - \frac{3}{2}3\right) \qquad \text{או} \qquad 3x - 2y = 11 \ .$$

מערכת לינארית של אי שויונים:

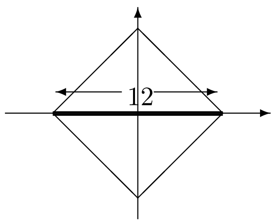
אם משוואה $ax+by=c$ מתארת את הנקודות של קו ישר, החלפת השיויון שבה באי שויון תתאר את הנקודות של חצי המישור בצד זה או אחר של הישר (תלוי בסוג האי שויון).

התחום המוגדר ע"י מערכת של אי שויונים כאלה הוא החיתוך (=התחום המשותף) של חצאי המישור האלה.

<u>דוגמה:</u> איזה תחום במישור מתואר ע"י המערכת $\begin{cases} x<2 \\ y<x+3 \\ y>-x \end{cases}$?



<u>תשובה:</u> בציור משורטטים שלושת הישרים המתאימים למערכת (= במקום >,<). התחום המקווקו מתקבל מבחירת הצד הנכון של כל ישר: <u>משמאל</u> ל־ $x=2$, <u>מתחת</u> ל־ $y=x+3$ <u>ומעל</u> ל־ $y=-x$.



<u>תרגיל:</u> רישמו, בעזרת מערכת לינארית של אי שוויונים, את כל הנקודות הפנימיות של ריבוע שמרכזו בראשית, והוא מוטה בזוית $45°$ מהצירים ובעל אורך אלכסון 12.

<u>פתרון:</u> המשוואות הן $y=x-6$, $y=x+6$, $y=-x-6$ ו־ $y=-x+6$. בכתיבה מקוצרת נוכל לכתוב כי הריבוע מתואר ע"י שני האי שויונים

$$-6<x-y<6 \qquad \text{וגם} \qquad -6<x+y<6$$

או ע"י האי שויונים

$$|x-y|<6 \qquad \text{וגם} \qquad |x+y|<6\ .$$

<u>**משוואת המעגל:**</u> **משוואת המעגל שמרכזו** $C(a,b)$ **ורדיוסו** R **היא** $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

<u>הסבר:</u> המרחק של נקודה כללית $P(x,y)$ על המעגל ממרכזו הוא $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, ומרחק זה שווה לרדיוס R. וכעת מעלים בריבוע את שני הביטויים השווים האלה.

<u>דוגמה:</u> מהן משוואות המעגלים המשיקים לציר y?

תנאי ההשקה הוא שהמרחק בין מרכז המעגל $C(a,b)$ לציר ה־ y (כלומר $|a|$) יהיה בדיוק רדיוס המעגל R. לכן התנאי הוא $|a|=R$, והמעגלים הם מהצורה

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2\ .$$

פונקציות

פרופ' יואב בנימיני

רשימת הנושאים שנטפל בהם בשיעור זה היא:

* פונקציות ־ מושגים בסיסיים
* הפונקציה המעריכית והפונקציה הלוגריתמית
* פונקציות טריגונומטריות
* פונקציות טריגונומטריות הפוכות
* קואורדינטות קטביות

מושגים בסיסיים

נסמן ב־ $f(x)$ את הערך של הפונקציה f בנקודה x. אנחנו נדון רק בפונקציות המוגדרות עבור x־ים ממשיים, ושערכיהן גם הם מספרים ממשיים. לדוגמא

$$(i) \qquad f(x) = x^2$$
$$(ii) \qquad f(x) = \sqrt{x}$$
$$(iii) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ \frac{1}{x^2-1} & x > 0 \ ; \ x \neq 1 \end{cases}$$

<u>הערה:</u> גם לכל מספר מרוכב מוגדר הריבוע שלו שגם הוא מספר מרוכב), ולכן אפשר להתייחס לפונקצית "ההעלאה בריבוע" (i) גם כפונקציה של משתנה מרוכב. אבל, כאמור, פה נעסוק רק במספרים ממשיים.

<u>תחום ההגדרה:</u> לפעמים אנחנו מעוניינים בערכי הפונקציה רק עבור x־ים מסויימים, ואנו קוראים ל־ x־ים אלה תחום ההגדרה של הפונקציה. תחום זה יכול להיות קטן יותר מהתחום שבו יש לנוסחאות משמעות. למשל, בדוגמא (i) תחום ההגדרה הטבעי הוא כל הישר, אך לעתים נרצה להסתכל על x^2 רק בקבוצת מספרים קטנה יותר (כגון, רק עבור $x \geq 0$). באופן דומה תחום ההגדרה הטבעי בדוגמא (ii) הוא $D = \{x : x \geq 0\}$, וב־ (iii) הוא $D = \{x : x \neq 1, 0\}$, אך לפעמים נתעניין רק בתחומים חלקיים.

<u>טווח:</u> כאשר ערכי הפונקציה מוגבלים להיות בתוך קבוצה מסויימת B (למשל בדוגמא (i) הם בהכרח אי־שליליים), אומרים ש־ f מעתיקה את D <u>לתוך</u> B, קוראים ל־ B הטווח של f, ומסמנים $f : D \to B$.

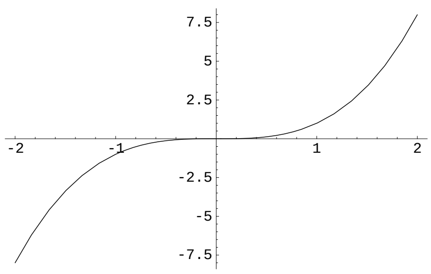
<u>תמונה:</u> הערכים בפועל שפונקציה $f : D \to B$ מקבלת הם בד"כ רק קבוצה חלקית של הטווח, וקוראים להם התמונה של f. למשל, הפונקציה הניתנת ע"י $f(x) = 4 + 2x^4 - x^2 - x^3$ בודאי מקבלת רק ערכים חיוביים (בדקו שאכן זה כך!), אך לא את כולם ־־ ובדוגמא זו דרוש קצת מאמץ לברר אלה ערכים באמת מתקבלים.

בכתיבה מתמטית, התמונה של פונקציה $f : D \to B$ היא הקבוצה

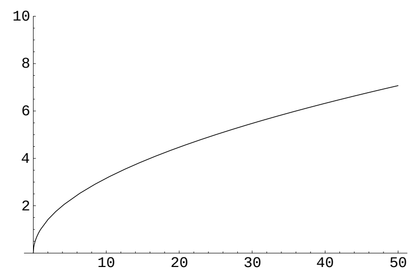
$$\{ \text{קיים } x \in B \text{ כך ש־ } f(x) = y \ : y\}.$$

על: פונקציה $f:D\to B$ נקראת על אם התמונה של f היא כל B. למשל, $f(x)=x^2$ מעתיקה את הישר על הקרן האי־שלילית.

גרף: הגרף של הפונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ הוא אוסף הנקודות (x,y) במישור כך ש־ x נקודה ב־ B ו־ $y=f(x)$.
לדוגמא נשרטט את הגרף של $f(x)=x^3$ ו־ $f(x)=\sqrt{x}$.



$f_1(x)=x^3$

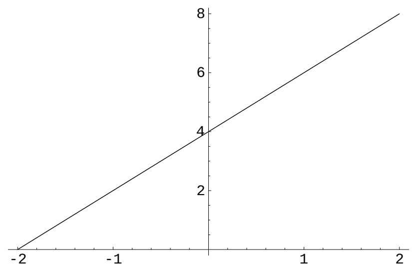


$f_2(x)=\sqrt(x)$

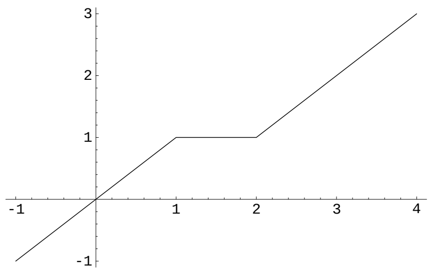
התנאי שמבטיח שעקום במישור יהיה גרף של פונקציה הוא שאין בו שתי נקודות שונות (x,y_1) ו־ (x,y_2) עם אותו רכיב ראשון. כלומר, שכל ישר אנכי חותך את העקום לכל היותר בנקודה אחת.

חד חד ערכיות: פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ נקראת חד־חד־ערכית (חח"ע) אם לכל y בתמונה יש x יחיד בתחום ההגדרה D של f כך ש־ $f(x)=y$. או, באופן שקול: לכל $x_1\neq x_2$ מתקיים כי $f(x_1)\neq f(x_2)$.
כך למשל הפונקציה $f(x)=x^3$ היא חח"ע (כי לכל y ממשי יש שורש שלישי יחיד) אך הפונקציה $f(x)=x^2$, כשהיא מוגדרת על כל הישר, איננה חח"ע (כי לכל מספר חיובי יש שני שורשים ריבועיים).
אם f איננה חח"ע, יהיה לנו נוח, לפעמים, להגביל את תחום ההגדרה שלה מבלי לשנות את התמונה כך שבתחום המוגבל היא כן תהיה חח"ע. למשל, הפונקציה $f(x)=x^2$ איננה חח"ע כאשר תחום ההגדרה הוא כל הישר, אך אם נסתכל על התחום החלקי של המספרים האי שליליים, היא כן תהיה חח"ע שם. (וזו הדרך המתמטית להציג את ההגדרה הרגילה של $\sqrt{x}$ כשורש החיובי.)

מונוטוניות: דוגמאות חשובות לפונקציות חח"ע מתקבלות ע"י הסתכלות בפונקציות מונוטוניות:
נאמר ש־ f היא פונקציה עולה אם לכל $x_1<x_2$ מתקיים כי $f(x_1)\le f(x_2)$.
נאמר ש־ f עולה ממש אם לכל $x_1<x_2$ מתקיים כי $f(x_1)<f(x_2)$.



פונקציה עולה ממש



פונקציה עולה

באופן אנלוגי מגדירים פונקציה יורדת ופונקציה יורדת ממש. נשתמש בשם הכללי פונקציה מונוטונית אם הפונקציה היא או עולה או יורדת, ובשם פונקציה מונוטונית ממש אם היא עולה ממש או יורדת ממש.

ברור כי פונקציה מונוטונית ממש היא חח"ע.

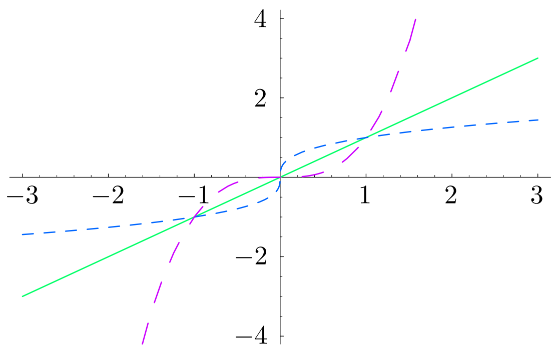
<u>הפונקציה ההפוכה (או הפכית)</u>: אם $f:D\to B$ היא פונקציה חח"ע ועל, אז נוכל להסתכל על הפונקציה ההפוכה: זו הפונקציה המתאימה לכל נקודה y בתמונה את הערך (היחיד) x בתחום ההגדרה של f שבו f מקבלת את הערך y.

לדוגמא: אם מסתכלים על הפונקציה $f(x)=x^2$ כפונקציה מהקרן האי שלילית אל הקרן האי שלילית, אז היא חח"ע ועל, והפונקציה ההפוכה לה היא הפונקציה $g(y)=\sqrt{y}$.

הסימון המקובל לפונקציה ההפוכה לפונקציה f הוא f^{-1}. (לא לבלבל עם המנה $1/f$!). ואז $f^{-1}:B\to D$, והקשר בין f ל־ f^{-1}, מתוארים באופן הבא:

$$x=f^{-1}(y) \text{ אם ורק אם } y=f(x).$$

הגרף של f^{-1} מתקבל מזה של f ע"י שיקופו ביחס לישר $y=x$. זה למעשה אותו עקום כאשר ציר ה־ x־ים וציר ה־y־ים מחליפים את תפקידיהם: y הוא המשתנה הבלתי תלוי ו־ x הוא המשתנה התלוי.



$f(x)=x^3, f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

כעת נציג משפחות חשובות של פונקציות המופיעות הרבה במתמטיקה ובשימושיה: אלו הן הפונקציות המעריכיות, הפונקציות הלוגריתמיות, הפונקציות הטריגונומטריות והפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות.

הפונקציה המעריכית והפונקציה הלוגריתמית

הפונקציה המעריכית: נקבע מספר $a>0$ כך ש־ $a\neq 1$. הפונקציה $f(x)=a^x$ נקראת הפונקציה המעריכית עם בסיס a. המשתנה x של הפונקציה נקרא המעריך (או החזקה).

אם x טבעי התנאי ש־ $a>0$ לא חשוב ו־ a^x מוגדר גם עבור a שלילי, אך כבר כאשר x רציונלי (=שבר) a^x בדר"כ איננו מוגדר (למשל כאשר $x=1/2$) -- ומכאן המגבלה שהבסיס יהיה תמיד מספר חיובי. (התנאי ש־ $a\neq 1$ הוא טכני: $1^x=1$ לכל x ומקרה זה פשוט לא מעניין!).

ההגדרה של a^x נעשית בשלבים:

אם x טבעי a^x מוגדר כמכפלה של a בעצמו x פעמים (ו־ $a^0=1$). בהגדרה זו מתקיימת הזהות

$$a^{x+y}=a^xa^y \ .$$

זהות זו תשמש לנו השראה כדי להרחיב את ההגדרה למספרים שליליים. אם נרצה שהזהות תמשיך להתקיים גם למספרים שליליים ונציב $y=-x$ אז נקבל כי $1=a^0=a^{x-x}=a^xa^{-x}$, כלומר נהיה חייבים להגדיר

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x} \ .$$

למספרים טבעיים מתקיימת גם הזהות

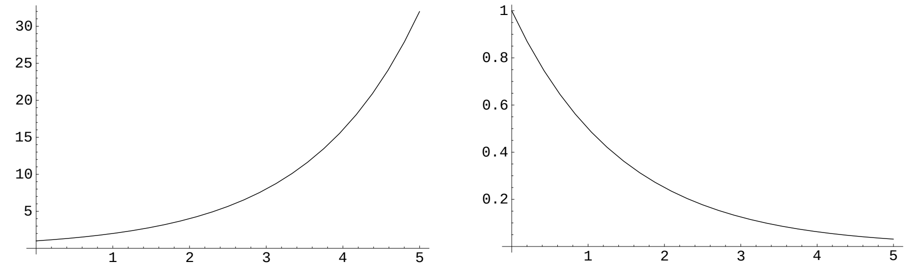
$$(a^x)^y=a^{xy}$$

ואם נרצה שזהות זו תהיה תקפה גם עבור $x=1/n$ כאשר $y=n$ הוא מספר טבעי, נקבל כי $\left(a^{1/n}\right)^n=a^{n/n}=a$ וחייבים להגדיר $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$. כלומר, $a^{1/n}$ הוא השורש ה־ n־י של a.

באופן דומה אם נשתמש בזהות נוכל להרחיב את ההגדרה של הפונקציה המעריכית לכל x רציונלי: אם m,n שלמים אז

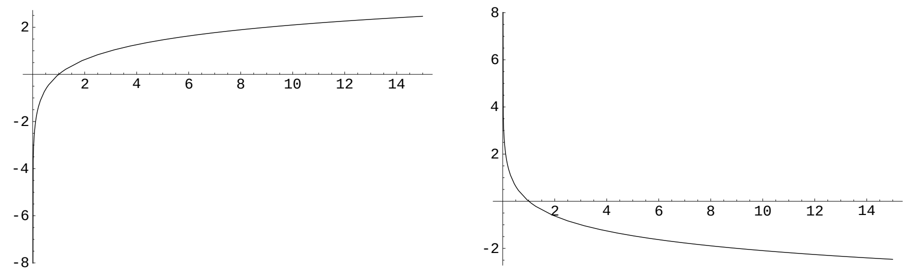
$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= \left(a^{1/n}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \\ &= \left(a^m\right)^{1/n}=\sqrt[n]{a^m}. \end{aligned}$$

ההגדרה עבור x ממשי (שאינו שבר) יותר מסובכת (והיא מוסברת בחלק מקורסי החדו"א), אך חשוב לדעת כי כל הזהויות האלה נשארות נכונות גם ל־ x־ים ממשיים כלליים.
הפונקציות המעריכיות מקבלות רק ערכים חיוביים, והתמונה שלהן היא כל הקרן החיובית. תכונה נוספת שלהן היא שהן מונוטוניות: עולות ממש כאשר $a > 1$ ויורדות ממש כאשר $a < 1$.



$f_2(x) = 2^x$ $\quad$ $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

הפונקציה הלוגריתמית: ראינו כי הפונקציה המעריכית a^x עם בסיס a היא חח"ע, מוגדרת על כל הישר, ומעתיקה אותו על כל הקרן החיובית. לכן יש לה פונקציה הפכית, שתסומן ב־ $\log_a x$, כלומר, $\log_a x = y$ פירושו ש־ $x = a^y$.
תחום ההגדרה של הפונקציה $\log_a x$ הוא כל הקרן החיובית, ותמונתה היא כל הישר. הגרף שלה נראה כך



$f_1(x) = \log_3(x)$ $\quad$ $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$

עפ"י הגדרת הפונקציה ההפוכה מתקיימות הזהויות

$$a^{\log_a x} = x \ ; \ \log_a(a^x) = x.$$

התרגום של הזהויות שמקיימת הפונקציה המעריכית מראה שהפונקציה הלוגריתמית מקיימת את הזהויות הבאות: לכל $x, y > 0$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$
$$\log_a x^y = y \log_a x$$

נוכיח למשל את הזהות הראשונה:

נסמן $\alpha = \log_a x$ ו־ $\beta = \log_a y$, ואז $a^\alpha = x$ ו־ $a^\beta = y$. הזהות המעריכית הראשונה אומרת כי

$$xy = a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

ניקח לוגריתמים משני אגפי המשוואה ונקבל, עפ"י הגדרת הלוגריתם

$$\log_a xy = \log_a \left(a^{\alpha+\beta}\right) = \alpha + \beta = \log_a x + \log_a y$$

ונקבל את הדרוש.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו את שתי הזהויות האחרות, והוכיחו גם את הנוסחה הבאה לקשר בין הפונקציות הלוגריתמיות המתאימות לבסיסים שונים a ו־ b:

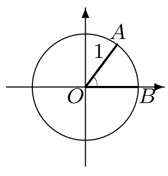
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} .$$

<u>סימונים</u>: בביה"ס היה מקובל לסמן ב־ $\log$ את הלוגריתם עם בסיס 10 וב־ $\ln$ את הלוגריתם עם "הבסיס הטבעי" e. השימוש בבסיס e נובע משיקולים מתמטיים שאותם תראו כשתלמדו חשבון דיפרנציאלי. הסיבה להעדפה של הבסיס 10 היא היסטורית ונבעה מכך שאנחנו נוהגים להשתמש בהצגה העשרונית של מספרים.

כיום מקובל גם לסמן ב־ $\log$ את הלוגריתם עם הבסיס הטבעי e (ולא להשתמש כלל ב־ $\ln$) או, בעיקר במדעי המחשב, את הלוגריתם עם הבסיס 2. בקורסים השונים שתלמדו בטכניון המרצים יגידו מהם הסימונים המקובלים עליהם.

פונקציות טריגונומטריות

<u>רדיאנים</u>: אנו רגילים מביה"ס למדוד זוויות במעלות, אך במתמטיקה (מסיבות שתובהרנה כשתלמדו חשבון דיפרנציאלי) נהוג בדרך כלל למדוד זוויות ברדיאנים ולא במעלות. זווית היא בת α רדיאנים אם אורך הקשת שהיא חוסמת במעגל ברדיוס 1 היא α.



$$\overset{\frown}{AB} = \alpha$$

$$\sphericalangle\, AOB = \alpha$$

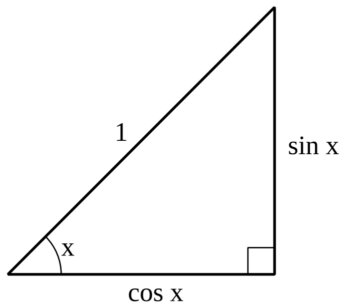
ברור שגודל הזווית ברדיאנים פרופורציונלי לגדלה במעלות

$$\alpha_{rad} = C \cdot \alpha^\circ$$

וכדי לקבוע את המקדם C, נשתמש בכך שהיקף מעגל ברדיוס 1 הוא 2π והוא מתאים לזווית בת 360°. כלומר, $2\pi = C \cdot 360$, ולכן $C = \frac{2\pi}{360}$ ומקבלים את הנוסחה

$$\alpha_{rad} = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha^\circ$$

<u>הפונקציות הטריגונומטריות:</u>



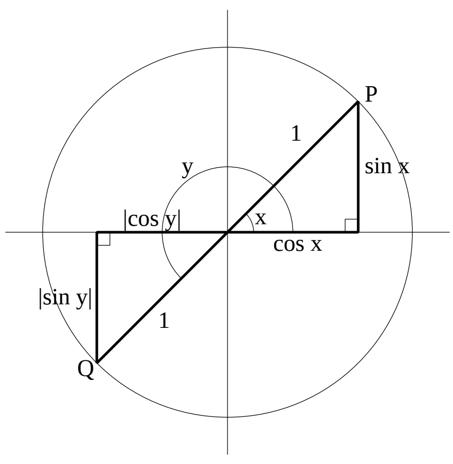
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

<u>זוויות מיוחדות</u>: יש לדעת את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π. (למשל, $\sin \pi/6 = 1/2$ או $\tan \pi/4 = 1$ וכו').

את הזהויות הבאות "רואים מהציור"

1. <u>הזזה ב־ π:</u>

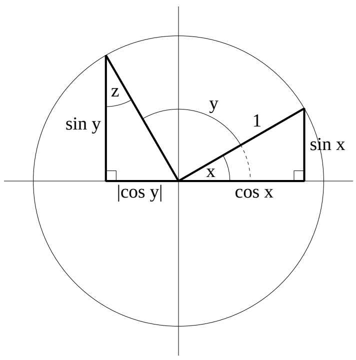
$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$
$$\tan(x+\pi) = \tan x$$



$$y = x + \pi$$
$$P = (\cos x, \sin x)$$
$$Q = (\cos y, \sin y) = (\cos(x+\pi), \sin(x+\pi))$$

2. הזזה ב־ $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$$
$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$$
$$\tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan x}$$



מחפיפת משולשים

$$\begin{aligned} &y = x+\tfrac{\pi}{2} \\ &z = x \\ &\cos x = \sin y = \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) \\ &\sin x = -\cos y = -\cos(x+\tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

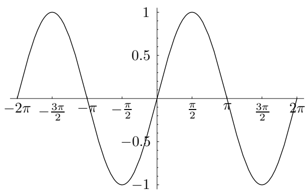
3. מחזוריות:

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$
$$\tan(x+\pi) = \tan x$$

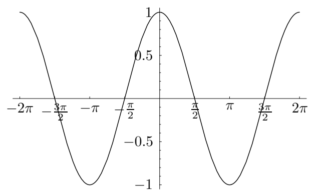
4. זוגיות/אי זוגיות:

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

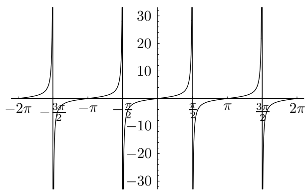
<u>גרפים</u>: בעזרת הציור המגדיר אותן והנוסחאות האלה אפשר לשרטט באופן סכמטי את הגרפים של הפונקציות $\sin\ ;\ \cos\ ;\ \tan$.



$\sin(x)$

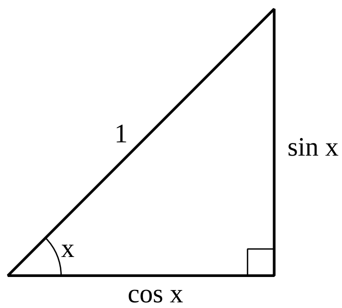


$\cos(x)$



$\tan(x)$

<u>משפט פיתגורס:</u> . $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



כמסקנה מקבלים כי $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, מכיון ש־

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \ .$$

זהויות נוספות שתהיינה שימושיות בקורסי המתמטיקה שתלמדו הן הזהויות הבאות (שאותן לא נוכיח פה):

<u>זווית כפולה:</u>

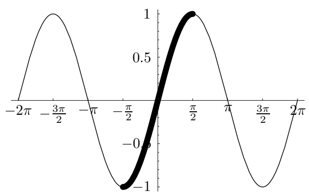
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

<u>הפרש:</u>

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

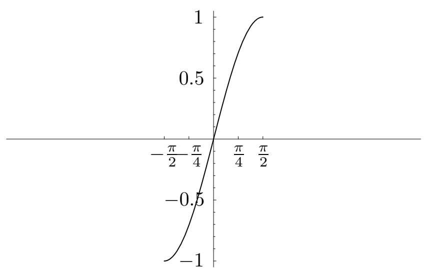
פונקציות טריגונומטריות הפוכות

<u>arcsin</u>: אם $|x| \leq 1$ אז למשוואה $\sin t = x$ יש הרבה פתרונות. כך למשל אם t פתרון, אז גם $t + 2\pi$ פתרון (ויש עוד הרבה). אם רוצים שהפונקציה $\sin$ תהיה חח"ע יש להגביל את תחום ההגדרה, כלומר למצוא קבוצה חלקית D כך שלמשוואה $\sin t = x$ יהיה פתרון יחיד y בקבוצה D. כאשר נגביל כך את תחום ההגדרה $\sin$ תהיה הפיכה, ונסמן את הפונקציה ההפכית ב־ $\arcsin$. היא מוגדרת באופן הבא: $y = \arcsin x$ פרושו ש־ y היא הנקודה (היחידה!) ב־ D המקיימת ש־ $\sin y = x$.
תחום D כזה אפשר לבחור בהרבה אופנים



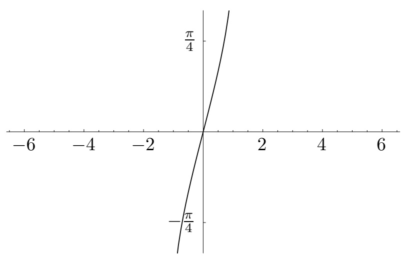
$\sin(x)$

ומקובל לקחת כ־ D את הקטע הסגור $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:



$\sin(x)$

הגרף של $\arcsin x$ הוא:

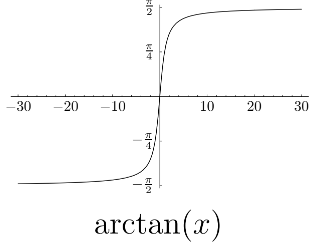


$\arcsin(x)$

<u>arccos</u>: באופן דומה $y = \arccos x$ מוגדר כ־ y (היחיד) ב־$[0, \pi]$ כך ש־ $\cos y = x$.

<u>תרגיל</u>: לשרטט את הגרף של $\arccos x$.

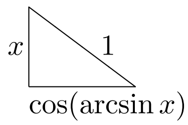
<u>arctan</u>: $y = \arctan x$ מוגדר כ־ y (היחיד) המקיים $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ כך ש־ $\tan y = x$.
הגרף של $\arctan x$ הוא



$\arctan(x)$

תרגילים:

1. להראות כי $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.



פתרון: נסתכל במשולש ישר זווית עם יתר 1 כך שאחת הצלעות היא באורך x. אז $\arcsin x$ היא הזווית הנגדית, ולכן $\cos(\arcsin x)$ היא הצלע הסמוכה לזווית זו. והנוסחה מתקבלת ממשפט פיתגורס.

2. להוכיח כי $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

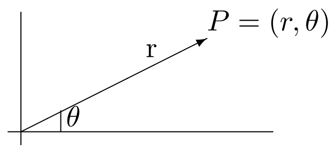
פתרון: במשולש שבציור הקודם $\arcsin x$ הוא הזווית הנגדית לצלע x ו־ $\arccos x$ היא הזווית הסמוכה, וסכומן הוא $\pi/2 = 90°$.

קואורדינטות קטביות

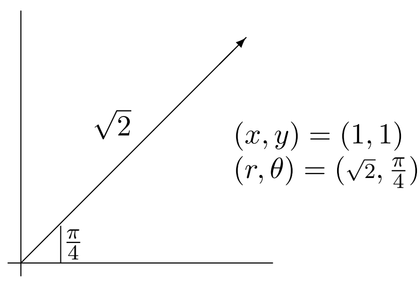
שימוש חשוב בפונקציות הטריגונומטריות ובפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות הוא ההצגה של נקודות במישור בעזרת קואורדינטות קוטביות.

קואורדינטות קרטזיות: משתמשים במערכת צירים ניצבת, ומתארים נקודה P במישור ע"י ההטלים שלה על הצירים, כלומר $P=(x,y)$ פירושו שההטלים של P הם x ו־ y בהתאמה.

קואורדינטות קוטביות: כאן נתאר את הנקודה P ע"י מרחקה מהראשית (שיסומן באות r), והזווית שהיא יוצרת עם הקרן החיובית על ציר ה־ x־ים (שתסומן באות θ), ונכתוב $P=(r,\theta)$.



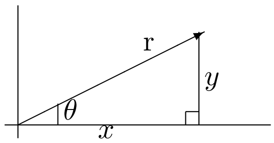
לדוגמא: הנקודה $(1,1)$ היא במרחק $\sqrt{2}$ מהראשית והזווית שהיא יוצרת עם הקרן החיובית על ציר ה־ x־ים היא $\pi/4$, ולכן תיאורה בקואורדינטות קטביות הוא $(\sqrt{2},\pi/4)$.



נוסחאות המעבר:

נתונה נקודה P במישור. אם ידוע התאור שלה בקואורדינטות קרטזיות, איך נחשב את הקואורדינטות הקטביות שלה? ולהפך, אם ידוע התאור שלה בקואורדינטות קטביות, איך נחשב את הקואורדינטות הקרטזיות שלה?

נניח כי $P=(r,\theta)$. נסתכל במשולש ישר הזווית שבסיסו ההיטל של הווקטור P על ציר ה־ x־ים, וגבהו הוא האנך מ־ P לציר ה־ x־ים.



אז $\sin\theta=y/r$ ו־ $\cos\theta=x/r$, וקבלנו את הנוסחאות

$$y=r\sin\theta \quad \text{ו־} \quad x=r\cos\theta\ .$$

להפך, אם $P=(x,y)$, אז מרחקה מהראשית הוא $r^2=x^2+y^2$ (ע"ס משפט פיתגורס), ו־ $\tan\theta=y/x$. מתקבלות הנוסחאות

$$\theta=\arctan\frac{y}{x} \quad \text{ו־} \quad r=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

אי שויונים וערך מוחלט

פרופ"ח אדי מאיר־וולף

הגדרות וסימונים

נקבע שני מספרים x ו־ y ונרשום

- $x<y$ אם ערכו של x קטן מזה של y $(2<5.7)$
- $x>y$ אם ערכו של x גדול מזה של y $(4>1)$
- $x\leq y$ אם ערכו של x קטן מזה של y, או שווה לו $(-4.1\leq 0, \quad 3.8\leq 3.8)$
- $x\geq y$ אם ערכו של x גדול מזה של y, או שווה לו $(7\geq 2, \quad -1\geq -1)$
- שרשרת אי שויונים (כולם באותו כוון!) פרושה **שכולם** מתקיימים.
  למשל $2<x\leq 5$ פרושו ש־ x מספר גדול מ־ 2 וקטן או שווה ל־ 5.
  ביטויים מהצורה $0\leq x>b$ אינם מקובלים.

הערך המוחלט של a מוגדר ע"י $|a| = \begin{cases} a & a\geq 0 \text{ כאשר} \\ -a & a<0 \text{ כאשר} \end{cases}$ $(|6.5|=6.5, \quad |-8|=8)$

נציין מספר תכונות מיידיות של הערך המוחלט:

א. $|-a|=|a|$

ב. $a\leq |a|$ ו־ $-a\leq |a|$

ג. אם $a\leq b$ ו־ $-a\leq b$ אזי $|a|\leq b$ (ובאופן דומה אם $\leq$ מוחלף ב־ $<$)

ד. $|a|$ הוא המרחק של a מהראשית, ו־ $|a-b|$ הוא המרחק בין הנקודות a ו־ b.

קבוצת מספרים A מתוארת מפורשות (למשל $\{1,3,8\}$ או $\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$) או ע"י ציון תכונות שאיבריה מקיימים (למשל $\{x : |x|>2\}$ או $\{k\in\mathbb{N}$ מתחלק ב־ $3 : k\}$).

<u>קבוצות מיוחדות:</u> **קטעים** שקצותיהם הם מספרים a ו־ b (כאשר $a<b$) יסומנו באופן הבא:

$$[a,b) = \{x : \ a\leq x<b\} \qquad (a,b) = \{x : \ a<x<b\}$$

$$[a,b] = \{x : \ a\leq x\leq b\} \qquad (a,b] = \{x : \ a<x\leq b\}$$

ל־ (a,b) נקרא קטע <u>פתוח</u> ול־ $[a,b]$ קטע <u>סגור</u>.
מקובל גם להשתמש בסמל ∞ בכתיבת אי שויונים, למרות שאינו מספר: הסימון $2<x<\infty$ פרושו הוא פשוט $2<x$. קרניים תכתבנה בעזרת ∞ או $-\infty$. למשל,

$(-\infty,0)=\mathbb{R}_-$ $\qquad (0,\infty)=\mathbb{R}_+$ $\qquad (-\infty,\infty)=\mathbb{R}$ $\qquad [-1,\infty)=\{x : -1\leq x\}$.

טענות ותרגילים

1. הוכיחו שלכל a ו־ b מתקיים $a^2+b^2 \geq 2ab$.

2. פתרו $|x-3| \leq 4$.

לפני שניגש לפתרון השאלות, חשוב להבין את ההבדל בין שתיהן:
בתרגיל 1 אנחנו מתבקשים להראות שהאי שויון מתקיים לכל הערכים של a ו־ b.
בתרגיל 2 אנחנו מתבקשים למצוא את הערכים של x עבורם האי שויון מתקיים.

(לו החלפנו את האי שויון בשויון היינו אומרים שתרגיל 1 הוא זהות שאותה יש להוכיח, בעוד שתרגיל 2 הוא משוואה אותה יש לפתור. כשמדובר באי שויונים אין הפרדה כזו במינוח).

פתרונות

1) $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0$ לכל a, b, ולכן $a^2+b^2 \geq 2ab$. **מש"ל**

2) אם $x \geq 3$ האי שויון הוא $x-3 \leq 4$, דהיינו $x \leq 7$, ומצאנו כי כל x בקטע $[3,7]$ הוא פתרון.

אם $x<3$ האי שויון הוא $3-x \leq 4$, דהיינו $-1 \leq x$, וזה מוסיף כפתרונות את נקודות הקטע $[-1,3)$.

לסיכום, קבוצת הפתרונות של האי שויון היא $[-1,7] = [3,7] \cup [-1,3)$.

יש דרך יותר טבעית לפתור את האי שויון (2). באופן גיאומטרי $|x-a|$ הוא המרחק בין a ל־ x, ולכן המספרים x המקיימים את האי שויון (2) הם בדיוק אלה אשר מרחקם מ־ 3 לא עולה על 4. אם ניקח 4 יחידות ימינה ושמאלה מ־ 3, נקבל אכן את הקטע $[-1,7]$.

באופן כללי נרשום

$$\boxed{\begin{aligned}&\{x : |x-a| < d\} = \{x : a-d<x<a+d\} = (a-d, a+d)\\ &\{x : |x-a| \leq d\} = \{x : a-d\leq x\leq a+d\} = [a-d, a+d]\end{aligned}}$$

3. הוכיחו שלכל x ו־ y מתקיים (i) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (ii) $|x|-|y| \leq |x-y|$.

האי שויונים האלה הם מאוד שימושיים, ונקראים אי שויוני המשולש.

תחילה "ננמק" את (i) באופן הבא: כאשר ל־ x ול־ y יש אותו סימן, מתקיים כמובן שוויון. אם יש להם סימנים הפוכים אז באגף שמאל יש קיזוז בינהם לפני לקיחת הערך המוחלט, ואילו באגף ימין אין קיזוז כזה.

להוכחה פורמאלית של (i) נשתמש בתכונות (ב) ו־ (ג) מהעמוד הקודם. על סמך (ב) $x \leq |x|$ וגם $y \leq |y|$. נחבר את האי שויונים ונקבל כי $x+y \leq |x|+|y|$. באופן דומה $-x \leq |x|$ וגם $-y \leq |y|$, ולכן $-(x+y) \leq |x|+|y|$.

על פי (ג) נקבל כי $|x+y| \leq |x|+|y|$ **מש"ל** (i)

הערה: השתמשנו בכך שניתן לחבר אי שויונים: אם $a \leq b$ וגם $c \leq d$ אז $a+c \leq b+d$.
אבל אסור להחסיר אי שויונים: אם $a \leq b$ וגם $c \leq d$ אין זה נכון ש־ $a-c \leq b-d$!!

באותה הזדמנות נזכיר את הכלל

$$\boxed{a \leq b \implies \begin{cases} ac \leq bc & c \geq 0 \text{ אם} \\ ac \geq bc & c \leq 0 \text{ אם} \end{cases}}$$

להוכחת (ii) נשתמש ב־ (i) ונכתוב $|x| = |(x-y)+y| \le |x-y| + |y|$
וכעת נעביר את $|y|$ לאגף שמאל. **מש"ל** (ii)

4. $2^n \ge n^2$ **לכל** $n \ge 4$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה.

(i) טענת הבסיס: עבור $n=4$, אכן מתקיים ש־ $2^4 \overset{\checkmark}{\ge} 4^2$.

(ii) נניח ש־ $2^n \ge n^2$ וכי $n \ge 4$.
צ"ל $2^{n+1} \ge (n+1)^2$ **או** $2 \cdot 2^n \ge n^2+2n+1$.
על פי הנחת האינדוקציה $2^n \ge n^2$ ולכן **מספיק להוכיח** ש־ $2n^2 \ge n^2+2n+1$.
צ"ל $n^2 \ge 2n+1$ **או** $n(n-2) \ge 1$.
היות ואנו מתעניינים רק ב־ $n \ge 4$, אגף שמאל הוא מספר שלם חיובי ולכן ערכו אכן לפחות 1. **מש"ל**

למה שיטת האינדוקציה עובדת במקרה זה רק לכל $n \ge 4$?
אמנם טענת הבסיס נכונה גם ל־ $n=1,2$ אבל טענת המעבר נכונה רק עבור $n \ge 3$.
אז למה הטענה לא הוכחה לכל $n \ge 3$? כי טענת הבסיס <u>אינה</u> נכונה ל $n=3$!
לסיכום, הטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{N} \ne 3$, אבל שיטת האינדוקציה הוכיחה זאת רק ל־ $n \ge 4$.

שימו לב שכוון ההוכחה היה אחורנית, מהאי שוויון הנטען ועד לאי שוויון שקל להוכיחו. במקרים אלה חשוב לכתוב **צ"ל** (או את המילה **"או"**), כדי שהקורא יבין שמדובר ברישום מחודש של המטלה ולא באי שוויון המוצג כנכון. פעם אחת אף נרשם **"מספיק להוכיח"** כדי להדגיש שהיה נוח להוכיח אי שוויון ש<u>גורר</u> את הקודם אבל לא נגרר על ידו.

תרגיל בית א): הראו ש־ $2^{n-1} \ge n^2$ **לכל** $n \ge 7$. (נשתמש בתוצאה זו בהמשך)

תרגיל בית ב): הראו ש־ $2^n \ge n^3$ **עבור** $n \ge 10$.

5. $2^n \ge n^{17}$ **לכל** n **החל מ־** n_0 **מסויים.**

ההוכחה של שלב המעבר באינדוקציה תתחיל באופן דומה לתרגיל הקודם, אבל המשכה שונה כי החזקה הגבוהה 17 לא מאפשרת את ההנמקה הפשוטה שבסוף. מה שמסתמן בעקבות תרגיל זה הוא ש־ 2^n גדול (בתנאי ש־ n גדול מספיק) מכל חזקה של n: לכל חזקה k יש n_0 כך ש־ $2^n \ge n^k$ לכל $n \ge n_0$. זה אכן נכון וניתן להוכחה בעזרת כלים שתרכשו בסמסטר הראשון בטכניון.

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה.

(i) כבר טענת הבסיס איננה פשוטה: עבור $n_0=120$, אכן מתקיים $2^{120} \overset{\checkmark}{\ge} 120^{17}$, כפי שניתן לבדוק בעזרת מחשב.
(איננו טוענים ש־ 120 הוא ה־ n_0 הקטן ביותר האפשרי. אך בדיקה במחשב תראה, למשל, שהאי שוויון <u>לא</u> מתקיים עבור $n_0=100$.)

(ii) נניח ש־ $2^n \ge n^{17}$.
צ"ל $2^{n+1} \ge (n+1)^{17}$ **או** $2 \cdot 2^n \ge (n+1)^{17}$. היות ומהנחת האינדוקציה מתקיים $2^n \ge n^{17}$ **מספיק להוכיח** ש־ $2n^{17} \ge (n+1)^{17}$ **או ש־** $(1+\frac{1}{n})^{17} \le 2$
או $\frac{1}{n} \le 2^{1/17}-1$. אבל $2^{1/17}-1 \cong 0.04162$ ולכן האי שוויון האחרון מתקיים כבר ל־ $n=25$, ובוודאי לכל $n \ge 120$. **מש"ל**

6. $2^x \geq x^2$ **לכל** x **גדול מ־** x_0 **מסויים.**

כלומר, האי שויון מתרגיל 4 מתקיים לא רק למספרים שלמים.

<u>הוכחה:</u> קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $n-1 \leq x < n$ (אומרים ש־ $n-1$ הוא הערך השלם של x).
מהעובדה ש־ $f(x)=x^2$ ו־ $g(x)=2^x$ הינן פונקציות עולות בתחום $[0,\infty)$ נסיק כי $2^{n-1} \leq 2^x$ ו־ $x^2 \leq n^2$.
אם נוכיח שגם $n^2 \leq 2^{n-1}$ אז התוצאה תנבע משרשור שלושת האי שויונים.
כעת, אם $x \geq 7$, אז בודאי שגם $n \geq 7$ ואם כך הדבר, האי שויון $n^2 \leq 2^{n-1}$ הוא בדיוק תוכנו של תרגיל א' בעמ' 3. **מש"ל**

7. אם המספרים $x_1, \ldots, x_n$ **הם אי שליליים, אז**

$$x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq (x_1+\cdots+x_n)^2 \leq n(x_1^2+\cdots+x_n^2)$$

<u>הוכחה:</u> כאן יהיה נוח להשתמש בסימון המתמטי המקוצר $\sum_{j=1}^{n} b_j$ לסכום $b_1+b_2+\cdots+b_n$.
בסימון מקוצר זה הטענה היא כי

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ .$$

נזכיר גם את נוסחת הריבוע של רב איבר (בדקו את הנוסחה ל־ $n=2$ ו־ $n=3$, ונסו להוכיח אותה ל־ n כללי)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2x_ix_j \qquad (1)$$

(בסכום הכפול מופיעות כל המכפלות מהצורה $2x_ix_j$ המתאימות לכל הזוגות $i<j$).

האי שויון השמאלי נובע ישירות מנוסחה זו.

להוכחת האי שויון הימני, נשתמש בתרגיל 1 ונקבל כי $2x_ix_j \leq x_i^2+x_j^2$, לכל i ו־ j. לכן

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2x_ix_j \leq \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \left(x_i^2+x_j^2\right) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

כי כל x_i^2 מופיע בסכום האמצעי בדיוק $n-1$ פעמים (פעם אחת עם כל "בן זוג" אפשרי x_j^2).
כשנציב הערכה זו ב־(1) נקבל כי

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_ix_j \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2\end{aligned}$$

כמבוקש. **מש"ל**

תרגיל בית ג): בטענה 7, בדקו שהתנאי של אי שליליות הכרחי לאחד האי שויונים, ולא הכרחי לשני.

תרגיל בית ד): (כל המספרים כאן חיוביים) הראו ש־

(i) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ (ii) $\sqrt[4]{xyuv} \leq \frac{x+y+u+v}{4}$

(iii) $(x_1x_2\ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ **לכל** n **מהצורה** $n=2^k$

נעבור לאי שויונים מהסוג שיש לפתור, כלומר כאלה שיש למצוא את ערכי המשתנה עבורם מתקיים האי שויון.

8. $|x+3| + |x-4| > 11$

פתרון: שיטה אחת היא להפריד את הישר הממשי לשלושת התחומים $(-\infty, -3]$, $(-3, 4]$, $(4, \infty)$ כמו בתרגיל **2** ולכתוב את האי שויון ללא ערכים מוחלטים בכל אחד מהתחומים (מומלץ לבצע זאת כתרגיל). כאן נעדיף להסביר גישה יותר אינטואיטיבית, ונציג את הבעיה באופן השקול הבא:

"מהן הנקודות שסכום המרחקים מהן ל־ -3 ול־ 4 גדול מ־ 11?".

אף נקודה ב־ $[-3, 4]$ לא תקיים זאת כי סכום המרחקים עבורן שווה 7. כל התרחקות של יחידה מקצה של אותו קטע מגדילה את הסכום בשתי יחידות, ולכן, כדי להוסיף יותר מ־ 4 ל־ 7, יש להתרחק יותר מ־ 2 יחידות שמאלה או ימינה מהקטע.

מסקנה: תחום הפתרון של האי שויון הוא $(-\infty, -5) \cup (6, \infty)$.

תרגיל בית ה): (i) פתרו את האי שויון $|x| + |x+4| \leq 6$.
(ii) הראו שלאי שויון $|x-2|+|x-7| \leq 3$ אין פתרון.

9. מהו תחום ההגדרה המקסימלי של $f(x) = \sqrt{|1-x| - |x+2|}$?

פתרון: האי שויון הסמוי בשאלה הוא $|1-x| - |x+2| \geq 0$, כי לביטוי שלילי אין שורש ריבועי.

נציג את אי השוויון בצורה $|1-x| \geq |x+2|$, ואז אנחנו מחפשים את הנקודות שמרחקן ל־ -2 אינו גדול מאשר מרחקן ל־ 1, ואלו בדיוק הנקודות בקרן $(-\infty, -\frac{1}{2}]$: הנקודה $-\frac{1}{2}$ היא נקודת האמצע בין -2 ו־ 1.

10. **עבור אלו ערכי** m **יש למשוואה** $\frac{1}{m-1}\,x^2+3x+(2m-3)=0$ **פתרון ממשי ?**

פתרון: כמובן שנתעניין רק ב־ $m\neq 1$. כידוע, התנאי לקיום פתרון ממשי אחד הוא שהדיקרימיננטה תקיים $\Delta=9-4\frac{2m-3}{m-1}\geq 0$.

אם $m>1$ אז האי שויון שקול ל־ $9(m-1)\geq 4(2m-3)$ שמתקיים לכל $m\geq -3$, ולכן בוודאי לכל $m>1$.

אם $m<1$ אז האי שויון שקול ל־ $9(m-1)\leq 4(2m-3)$ שמתקיים רק ל־ $m\leq -3$.

ולכן הפתרון הוא $(-\infty,-3]\cup(1,\infty)$.

11. **מצאו** c **קטן ביותר כך ש־** (i) **אם** $|x-3|<a$ **ו־** $|y-3|<b$ **אז** $|x-y|<c$.
(ii) **אם** $|x+4|<a$ **ו־** $|y+1|<b$ **אז** $|x-y|<c$.

פתרון: (i) נציג תחילה "פתרון" מילולי: אם רוצים להרחיק את x ו־ y זה מזה כמה שיותר תחת המגבלות הנתונות, כדאי להזיז אותם מ־ 3 למרחקים של a ו־ b בהתאמה, ובכיוונים הפוכים. במקרה הכי "גרוע" זה, המרחק בינהם לא יעלה על $a+b$. נרשום זאת במדוייק:

$$|x-y|=|x-y-3+3|=|(x-3)-(y-3)|\leq|x-3|+|y-3|<a+b$$

וזה אומר שניתן לקחת $\boxed{c=a+b}$. כאן השתמשנו באי שויון המשולש (טענה 3).

(ii) המגבלות על x ו־ y נתונות הפעם סביב נקודות שונות, אך שיטת הפתרון דומה:

$$|x-y|=|x-y+4-1-3|=|(x+4)-(y+1)-3|\leq|x+4|+|y+1|+3<a+b+3$$

וניקח $\boxed{c=a+b+3}$.

תרגיל בית 1): מצאו c קטן ביותר כך שאם $|x+1|<a$ ו־ $|y-2|<b$ אז $|x-y|<c$.

12. **מצאו חסם מלעיל ומלרע ל־** $f(x)=x^3+3x^2-2x-5$ **לכל** x **המקיים** $|x+2|\leq 1$.

פתרון: גם כאן נעשה שימוש באי שויון המשולש. נזכיר שהמונח "חסם מלעיל" מתייחס למספר הגדול מכל ערך המתקבל ע"י הפונקציה בקטע הנתון, ובאופן דומה, "חסם מלרע" הוא מספר הקטן מכל אותם הערכים.

ובכן, $|f(x)|=|x^3+3x^2-2x-5|\leq|x^3|+|3x^2|+|2x|+5=|x|^3+3|x|^2+2|x|+5$

(השתמשנו בעובדה שכפל וחזקה "יוצאים" מהערך המוחלט). אנחנו מתעניינים ב־ x־ים בקטע $[-3,-1]$, וכל x כזה מקיים $|x|\leq 3$. לכן, $|f(x)|\leq 3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3+5=65$. זה אומר שעבור כל x בקטע, $-65\leq f(x)\leq 65$.

נעיר שלא ניסינו למצוא חסמים הדוקים. במאמץ נוסף ניתן להראות ש־ $-11\leq f(x)\leq 4$ לכל x ב־ $[-3,-1]$, אבל לעיתים מותר - ולמען הפשטות אף מומלץ - להיות "בזבזנים".

13. **אם x,y שייכים ל־ $[-2,1]$ ומרוחקים זה מזה לא יותר מ־ d , אז x^3 ו־ y^3 מרוחקים זה מזה לא יותר מ־ $\boxed{\ ?\ }$**

אנו מעריכים כאן איך שינוי בערכי המשתנה משפיע על ערכי הפונקציה $f(x)=x^3$. למשל, אם אורך הצלע של קוביה נמדד עם שגיאה מסויימת, טבעי להתעניין בשגיאה שתיגרם עקב כך בחישוב נפח הקוביה. (אם כי בפרשנות זו טבעי יותר להתרכז בקטע של x־ים חיוביים, שלא כמו בשאלה הנוכחית).

פתרון: לפי נוסחת פירוק ידועה, $y^3-x^3=(y-x)\,(y^2+yx+x^2)$ ולכן

$$\begin{aligned}|y^3-x^3| &= |y-x|\,|y^2+yx+x^2| \le |y-x|\,(|y|^2+|y|\,|x|+|x|^2)\\ &\le |y-x|\,(2^2+2\cdot 2+2^2) = 12|y-x| \le \boxed{12\mathbf{d}}\end{aligned}$$

(מה עשינו? פירקנו את ההפרש וחסמנו את הגורם השני כמו בתרגיל הקודם. יכולנו גם לחסום את d עצמו ב־ 3, שהוא אורך הקטע, ולרשום 36 במסגרת. אבל בכך היינו מחמיצים את התובנה החשובה שהפרשים "מתנפחים" באותו קטע פי 12 לכל היותר. פרוש הדבר, למשל, שאם מעוניינים בשגיאה של 0.1 לכל היותר בחישוב $f(x)$, יש לדאוג לשגיאה מירבית של כ־ 0.008 במדידת x.)

14. **נקבע קבוע $a>0$ ויהיו x,y השייכים ל־ $[a,\infty)$. לכל מספר $\mathbf{e}>0$ יש למצא מספר d** (התלוי כמובן ב־ e) **כך שאם x ו־ y מרוחקים זה מזה לא יותר מ־ d , אז $\sqrt{x}$ ו־ $\sqrt{y}$ יהיו מרוחקים זה מזה לא יותר מ־ e .**

פתרון: נשתמש בנוסחה $y-x=(\sqrt{y}+\sqrt{x})\,(\sqrt{y}-\sqrt{x})$ ונקבל, באופן דומה לבעיה הקודמת, כי

$$|\sqrt{y}-\sqrt{x}| = \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\,|y-x| \le \frac{1}{2\sqrt{a}}\,|y-x| \le \frac{d}{2\sqrt{a}}.$$

כאן מופיע d כשהוא עדיין גודל לא ידוע, אבל כדי לקבוע את d כך שיבטיח ש־ $|\sqrt{y}-\sqrt{x}|\le e$ אפשר פשוט לקחת $\boxed{\mathbf{d}=2\sqrt{a}\,\mathbf{e}}$.

תרגיל בית ז: (i) אם x,y שייכים ל־ $(0.4\,,\,9)$ ומרוחקים זה מזה לא יותר מ־ e , אז $\frac{1}{x}$ ו־ $\frac{1}{y}$ מרוחקים זה מזה לא יותר מ־ $\boxed{\ ?\ }$

(ii) נקבע מספר טבעי n ומספר $M>0$. תהיינה x,y שתי נקודות בקטע $[-M,M]$ ויהי $\mathbf{e}>0$ מספר נתון. מצאו מספר d כך שאם x ו־ y מרוחקים זה מזה לא יותר מ־ d, אז x^n ו־ y^n יהיו מרוחקים זה מזה לא יותר מ־ e.

פולינומים

ד"ר עליזה מלק

<u>רשימת נושאים</u>

- הגדרות
- פעולות חשבון - חיבור חיסור כפל וחילוק
- פריקות של פולינומים

<u>הגדרה:</u> פולינום, או רב־איבר, הוא פונקציה מהצורה

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

כאשר x הוא המשתנה ו־ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ הם המקדמים. לעיתים נרשום פשוט p במקום $p(x)$. (כשם של פולינום יכולה לשמש גם כל אות אחרת, למשל g, q וכו').

נאמר שהפולינום p הוא ממעלה n אם $a_n \neq 0$, ונסמן $\deg p = n$. המקדם a_n נקרא המקדם העליון (או המקדם המוביל) של הפולינום, והמקדם a_0 נקרא המקדם התחתון. כאשר $\deg p = 0$ הפולינום מקיים $p(x) = a_0$ באופן זהותי.

לפולינום המיוחד $p(x) = 0$ לכל x (כלומר $n = 0$ ו־ $a_0 = 0$) <u>אין מעלה.</u>

<u>דוגמאות</u>

1. $g = 7x^3 - 5x + 4$. כאן $\deg p = 7$ ו־ $a_3 = 7,\ a_2 = 0,\ a_1 = -5,\ a_0 = 4$.
2. $h(x) = 7$. כאן $\deg h = 0$ כי החזקה הגבוהה ביותר של x היא 0, ו־ $a_0 = 7$.

<u>שורשים של פולינום</u>

מספר ממשי α נקרא שורש של הפולינום p אם מתקיים $p(\alpha) = 0$. למשל $\alpha = -2$ הוא שורש של הפולינום $p(x) = x^3 - 5x - 2$, כי $0 = 2 - (-2)5 - (-2)^3$.

<u>הערות</u>

(i) המונח "שורש" נלקח בהשאלה מהמקרה הפרטי של פולינום מהסוג $q(x) = x^m - a$. במקרה זה $\sqrt[m]{a}$ הוא השורש של q (אם הוא מוגבר) ואז, אם m זוגי, גם $-\sqrt[m]{a}$ שורש.

(ii) <u>בהרצאות אלה נעסוק רק במספרים ממשיים ובשורשים ממשיים,</u> אך חשוב לזכור כי לפולינומים יכולים גם להיות שורשים מרוכבים. למשל, $\alpha_1 = i$ ו־ $\alpha_2 = -i$ הינם שורשים של $r(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ בנוסף לשורש הממשי $\alpha_3 = 1$.

פולינום ריבועי

פולינום $p(x)$ שמעלתו 2 נקרא פולינום ריבועי, ונהוג גם לרשום $p(x) = ax^2+bx+c$. מציאת השורשים של פולינום ריבועי כזה פירושה פתרון של המשוואה הריבועית $ax^2+bx+c = 0$.

דוגמאות

1. $2x^2-50 = 0$. כלומר $x^2=25$, ויש שני פתרונות $x_1=5$ ו־ $x_2=-5$.
2. $x^2+7 = 0$. למשוואה זו אין פתרון ממשי כי x^2+7 תמיד יהיה חיובי.
3. $x^2+2x+1 = 0$. אגף שמאל הוא ריבוע שלם והמשוואה היא $x^2+2x+1 = (x+1)^2 = 0$, שיש לה פתרון יחיד $x_1=-1$.
4. $x^2-6x+5 = 0$. "נשלים לריבוע", ונציג את המשוואה בצורה $(x-3)^2 = x^2-6x+9 = 4$, כלומר $x-3=\pm 2$, וקיימים שני פתרונות: $x_1=1$ ו־ $x_2=5$.

הדוגמאות האלה מובילות לנוסחת השורשים הכללית הכל כך מוכרת:

<u>טענה:</u> נתון פולינום ריבועי $p(x) = ax^2+bx+c$ עם $a\neq 0$, ונסמן $\Delta = b^2-4ac$. (Δ נקראת הדיסקרימיננטה של המשוואה). אז

אם $\Delta<0$ אין ל־p שורשים ממשיים.
אם $\Delta\geq 0$ יש ל־p שני שורשים ממשיים $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ו־ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

(אם $\Delta=0$ אומרים שיש שורש ממשי אחד או שיש שני שורשים ממשיים שווים).

<u>הוכחה:</u> כמו בדוגמה 3 למעלה, נבטא את $p(x)$ (בעצם, ולנוחות הכתיבה, את $4ap(x)$) כהפרש של ריבוע שלם ושל קבוע.

$$\begin{aligned} 4ap(x) &= 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = (4a^2x^2 + 4abx + b^2) + (4ac - b^2) \\ &= (2ax + b)^2 - \Delta \end{aligned}$$

זוהי הצגה כפי שחפשנו, והמשוואה $p(x)=0$ הופכת למשוואה $(2ax + b)^2 = \Delta$.
אם $\Delta<0$ אכן אין פתרון כי ריבוע לא יכול להיות שלילי.
אם $\Delta\geq 0$ נקבל $(2ax + b) = \pm\sqrt{\Delta}$ או $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. **מש"ל**

אם מרשים שורשים מרוכבים, יש גם שני שורשים כאשר $\Delta < 0$, והם ניתנים ע"י אותן הנוסחאות! באופן כללי יותר

<u>המשפט היסודי של האלגברה:</u> לכל פולינום ממעלה n יש n שורשים מרוכבים (אם כי חלקם אולי שווים זה לזה).

משפט זה חורג ממסגרת ההרצאות האלה. אנחנו רק נוכיח בהמשך את המקרה המיוחד הבא שלו (וגם נפרט מהי הכוונה בביטוי "שורשום שווים").

<u>טענה:</u> לכל פולינום ממעלה n יש <u>לכל היותר</u> n שורשים <u>ממשיים</u> (שחלקם אולי שווים זה לזה).

מציאת שורשים: דוגמאות

1. $p(x)=x(x-1)^2(x+4)$. כאן $p(\alpha)=0$ אם ורק אם $\alpha=0$ או $(\alpha-1)^2=0$ או $\alpha+4=0$, כלומר, שורשי p הם בדיוק 0, 1 ו־ -4.

ע"י פתיחת הסוגרים $p(x)=x^4+2x^3-7x^2+4x$. בהצגה זו לא "רואים" מיהם השורשים, ואילו p היה נתון בצורה זו, אז הדרך למצוא אותם היתה לעבור מהצגה זו להצגה כמכפלה. בדוגמאות (3) ואילך נבצע, אכן, תהליך כזה.

שימו לב ש־ $(x-1)$ מופיע בריבוע ־ או "פעמיים" בהצגה של p. נאמר שלשורש 1 יש ריבוי 2, או שיש שני שורשים שווים שערכם הוא 1.

2. $q(x)=x^7$. השורש היחיד הוא 0, ובאנלוגיה לדוגמה הקודמת, ריבויו הוא 7.

3. $r(x)=x^2-4x+4$. זה ריבוע שלם $r(x)=(x-2)^2$, ולכן יש שורש יחיד 2 עם ריבוי 2.

4. $f(x)=x^4+5x^3+6x^2$. נציג $f(x)=x^2(x^2+5x+6)=x^2(x+2)(x+3)$, והשורשים הם 0 (עם ריבוי 2), -2 (עם ריבוי 1) ו־ -3 (עם ריבוי 1).

5. $g(x)=x^4-4$. נציג $g(x)=(x^2-2)(x^2+2)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$, והשורשים הם $\pm\sqrt{2}$ (כל אחד עם ריבוי 1) כי הגורם (x^2+2) תמיד חיובי ממש ואינו מתאפס.

6. $h(x)=x^6-4x^4-16x^2+64$. האלגברה כאן קצת יותר מורכבת. נציג

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^6-4x^4)-(16x^2-64)=x^4(x^2-4)-16(x^2-4)=(x^4-16)(x^2-4) \\ &= (x^2-4)(x^2+4)(x-2)(x+2)=(x-2)^2(x+2)^2(x^2+4) \end{aligned}$$

והשורשים הם ± 2, שניהם עם ריבוי 2.

חשוב לדעת: אין שיטה כללית לפרוק פולינומים ממעלה גבוהה והצגתם כמכפלה או, באופן שקול, למציאת שורשיהם (בדומה לנוסחה כשהמעלה היא 2). אך, כפי שראינו בדוגמה האחרונה, לפעמים "יש מזל".

פעולות בין פולינומים

א. חיבור וחיסור פולינומים

הגדרה: נתונים שני פולינומים $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ ו־ $q(x)=b_mx^m+\ldots+b_0$. סכומם $p+q$ מוגדר כפולינום שבו המקדם של כל x^k הוא a_k+b_k. באופן דומה, $p-q$ הוא הפולינום שבו המקדם של כל x^k הוא a_k-b_k.

לדוגמה, אם $p(x)=x^3+7x^2-5$ ו־ $q(x)=x^5+3x^2-9x+4$ אז

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= x^5+x^3+10x^2-9x-1 \\ (p-q)(x) &= -x^5+x^3+4x^2+9x-9 \end{aligned}$$

הערות

(i) ההתייחסות לחזקות "חסרות" בפולינומים היא כאילו הן מופיעות עם מקדם 0.

(ii) כבר בהגדרה של פולינום מופיע, בעצם, חיבור פולינומים: כשכותבים למשל $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$, זו הצגה של p כסכום של הפולינומים $2x^3$, x^2 ו־ 1. סימון זה תואם את ההגדרה של חיבור פולינומים, ובאופן כזה כל פולינום הוא סכום של "מונומים" (או חד־איברים), כלומר פולינומים מהצורה bx^k.

מההגדרה ברור כי $\deg(p\pm q) \le \max(\deg p, \deg q)$

ובהחלט ייתכן אי שוויון –– וזה קורה כאשר לפולינומים p ו־ q יש אותה מעלה והמקדמים העליונים שלהם מבטלים זה את זה. לדוגמה: אם $p(x) = 2x^3-3x$ ו־ $q(x) = -2x^3-x^2+5x+4$, אז $(p+q)(x) = x^2+2x-4$.

ב. <u>כפל פולינומים</u> המכפלה של המונומים ax^j ו־ bx^k היא המונום abx^{j+k}. פעולת הכפל בין פולינומים כלליים נעשית ע"י פתיחת סוגריים וקיבוץ כל המונומים מאותה מעלה. לדוגמה:

$$\begin{aligned}(x^2+2x+1)(x^3+x-1) &= x^5+x^3-x^2+2x^4+2x^2-2x+x^3+x-1\\ &= x^5+2x^4+2x^3+x^2-x-1\end{aligned}$$

בדוגמה זו $\deg p=2$, $\deg q=3$ ו־ $\deg(p\cdot q)=5$, ובאופן כללי לכל שני פולינומים p ו־ q שאינם פולינום ה־ 0 מתקיים

$$\deg(p\,q) = \deg + \deg q\ .$$

ג. <u>חילוק פולינומים</u>

החילוק של פולינום ע"י פולינום אחר מוגדר באנלוגיה לחילוק של מספרים טבעיים. נקדים ונרענן את מושגי החלוקה של מספרים עם שארית, תחילה באמצעות דוגמה:

אם נחלק את 53 ב־5, המנה תהיה 10 והשארית 3. כותבים זאת בצורות שונות:

$$\begin{aligned}53:5 &= 10\ (3)\\ 53 &= 5\cdot 10+3 && \text{או}\\ 53:5 &= 10+\tfrac{3}{5} = 10\tfrac{3}{5} && \text{או}\end{aligned}$$

באופן כללי, אם m ו־ d מספרים טבעיים אז קיים מספר $q \ge 0$ הנקרא <u>המנה</u>, וקיים מספר r (המקיים $0\le r<d$) ונקרא <u>השארית</u>, כך ש־

$$\begin{aligned}m:d &= q\ (r)\\ m &= d\cdot q+r && \text{או}\\ m:d &= q+\tfrac{r}{d} && \text{או}\end{aligned}$$

אם השארית היא $r=0$ נאמר ש־ d מחלק את m **או** ש־ d גורם של m **או** ש־ m מתחלק ב־d. במקרה זה נרשום $d|m$. אם d לא מחלק את m נרשום $d\not|m$.

נעבור כעת לחלוקה עם שארית של פולינומים.

<u>משפט:</u> לכל שני פולינומים $m(x)$ ו־$d(x)$ ($\deg d>0$) קיים זוג פולינומים יחיד $q(x)$ ו־ $r(x)$ כך ש־ $\deg r<\deg d$, $\deg q=\deg m-\deg q$ וכך ש־

$$m(x)=d(x)q(x)+r(x)\ .$$

$q(x)$ נקראת <u>המנה</u> ו־ $r(x)$ נקראת <u>השארית</u>.

לא נביא כאן את הוכחת המשפט (תנסו!), אך נציג בהמשך את שיטת החילוק הארוך שבה מחשבים בפועל את המנה $q(x)$ ואת השארית $r(x)$.

<u>דוגמאות (בהן קל למצוא את המנה q והשארית r)</u>

1. $m(x)=x^4+5x^2-9x$ ו־ $d(x)=x$. כאן אפשר להציג $m(x)=x(x^3+5x-9)$, ולכן $q(x)=x^3+5x-9$ ו־ $r(x)=0$.
2. $h(x)=x^4+5x^2-9$ ו־ $d(x)=x$
   נבודד את המקדם התחתון -9, ונציג $h(x)=x(x^3+5x)-9$. לכן $q(x)=x^3+5x$ ו־ $r(x)=-9$.

שתי הדוגמאות האלו היו קלות כי המחלק $d(x)=x$ היה מונום. במקרה הכללי, אנחנו נאלצים להשתמש בשיטת החילוק הארוך, אותה נדגים תחילה עבור מספרים. נחלק את 12345 ב־ 12:

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & 1 & 0 & 2 & 8 & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & |12 \\
1 & 2 & & & & \\
\cline{1-2}
= & = & 3 & & & \\
 & & 0 & & & \\
\cline{3-3}
 & & 3 & 4 & & \\
 & & 2 & 4 & & \\
\cline{3-4}
 & & 1 & 0 & 5 & \\
 & & & 9 & 6 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 9 &
\end{array}$$

כלומר $12345=12{\times}1028+9$, $q=1028$ ו־ $r=9$.

חילוק פולינומים נעשה בתהליך דומה, וניתן שתי דוגמאות.

<u>דוגמה 1.</u> נחלק את $p(x) = 3x^4+18x^3+24x^2-3x-6$ ב־ $g(x) = x+2$:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & 3x^3 & +12x^2 & & -3 & & \\
\cline{2-6}
 & 3x^4 & +18x^3 & +24x^2 & -3x & -6 & \mid\ x+2 \\
- & 3x^4 & +6x^3 & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 12x^3 & +24x^2 & -3x & -6 & \\
- & & 12x^3 & +24x^2 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & & -3x & -6 & \\
 & & & & -3x & -6 & \\
\cline{5-6}
 & & & & = & = &
\end{array}
$$

(בכל שלב רושמים למעלה את מנת המונומים המובילים. למשל, בשלב הראשון $3x^4 : x = 3x^3$). קבלנו כי המנה היא $q(x) = 3x^3+12x^2-3$ והשארית היא $r(x)=0$, כלומר

$$p(x) = 3x^4+18x^3+24x^2-3x-6 = (x+2)(3x^3+12x^2-3) = g(x)\,q(x)\ .$$

<u>דוגמה 2.</u> נחלק את $m(x)=x^6+8x^5+5x^4+4x^3-2x^2+3x$ ב־ $d(x) = x^4+x+1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x^2 & +8x & +5 & & & & & \\
\cline{2-7}
 & x^6 & +8x^5 & +5x^4 & +4x^3 & -2x^2 & +3x & & \mid\ x^4 \ +x+1 \\
- & x^6 & & & +x^3 & +x^2 & & & \\
\cline{2-7}
 & & 8x^5 & +5x^4+ & 3x^3 & -3x^2 & +3x & & \\
- & & 8x^5 & & & +8x^2 & +8x & & \\
\cline{3-7}
 & & & 5x^4 & +3x^3 & -11x^2 & -5x & & \\
- & & & 5x^4 & & & +5x & +5 & \\
\cline{4-8}
 & & & & 3x^3 & -11x^2 & -10x & -5 &
\end{array}
$$

וקיבלנו המנה $q(x) = x^2+8x+5$ והשארית $r(x) = 3x^3-11x^2-10x-5$.
נשים לב שאכן $\deg q = \deg m - \deg d$ ו־ $\deg r = 3 < \deg d = 4$.

פריקות פולינומים

בדוגמאות שראינו מצאנו את השורשים של פולינום p ע"י הצגתו כמכפלה של פולינומים ממעלה 1 או 2. בסעיף זה נדון באופן מסודר בקשר שבין הפירוק של פולינום לגורמים ממעלה נמוכה לבין שורשיו.

למען האנלוגיה נחזור לפירוק של מספרים טבעיים כמכפלה של מספרים ראשוניים.

- נאמר שמספר טבעי $n\neq 1$ הוא ראשוני (או אי פריק) אם אין לו מחלקים פרט ל־ 1 ו־ n עצמו. אם n איננו ראשוני נאמר שהוא פריק.
- כל מספר טבעי $n\neq 1$ ניתן להציגו כמכפלה של מספרים ראשוניים, וזאת באופן יחיד (עד כדי סדר הגורמים).

למשל $12=2^2\times 3$. (המספר 1 הוצא ממניין הראשוניים כדי להבטיח את יחידות הפירוק. אחרת יכולנו לרשום אינסוף פירוקים אחרים, למשל $12=1^8\times 2^2\times 3$).

נחזור לפולינומים.

הגדרה: נאמר שפולינום $p(x)$ הוא פריק אם קיימים פולינומים $g(x)$ ו־ $h(x)$, שניהם ממעלה 1 או יותר, כך ש־ $p(x)=g(x)\,h(x)$. אם לא קיימים פולינומים כאלה, נאמר ש־ $p(x)$ אי פריק.

דוגמאות:

1. $x^2-4=(x-2)(x+2)$ ו־ $x^3-5x^2+4x=x(x-1)(x-4)$ פריקים.
2. נראה בהמשך כי x^2+2 אי פריק. שימו לב שההצגה $x^2+2=2(\frac{x^2}{2}+1)$ אינה מהווה פירוק במובן שלנו כי לגורם $g(x)=2$ יש מעלה 0.

טענה. פולינום $p(x)=ax+b$ ממעלה 1 הוא אי פריק ויש לו שורש יחיד.

הוכחה. נניח בשלילה ש־ p כן פריק ונציג $p(x)=g(x)h(x)$ כאשר $\deg g\geq 1$ וגם $\deg h\geq 1$. אבל אז $\deg p=\deg g+\deg h\geq 2$ בניגוד לנתון כי $\deg p=1$.
השורש היחיד של p הוא כמובן $-\frac{b}{a}$. **מש"ל**

כדי לבחון את הפריקות של פולינום כללי נעזר במשפט החשוב הבא:

משפט השארית. לכל מספר a השארית $r(x)$ המתקבלת מחלוקת הפולינום $p(x)$ בפולינום $(x-a)$ היא פולינום ממעלה 0, כלומר מספר, שערכו הוא $p(a)$.

הוכחה. נציג

$$p(x)=(x-a)q(x)+r(x) \qquad (*)$$

כאשר q המנה ו־ $\deg r(x)<\deg(x-a)=1$, ולכן מעלת $r(x)$ יכולה להיות רק 0, כלומר $r(x)$ הוא מספר קבוע, ונסמן אותו ב־ r. כעת נציב $x=a$ בזהות $(*)$ ונקבל כי $p(a)=r$. **מש"ל**

<u>דוגמה:</u> מהי השארית r כשמחלקים את $p(x)=x^3+7x^2-5$ ב־ $x+1$?
על פי משפט השארית, התשובה היא $r=p(-1)=-1+7-5=1$, כלומר $x^3+7x^2-5=(x+1)q(x)+1$. יש להדגיש שאין "קיצורי דרך" לחישוב המנה $q(x)$, ולחישובה יש לבצע חילוק ארוך.

<u>מסקנה 1.</u> מספר x_0 הוא שורש של פולינום p אם ורק אם $(x-x_0)$ מחלק את p, כלומר, אם ורק אם $r=0$ כשמחלקים את p ב־ $(x-x_0)$.

<u>מסקנה 2.</u> פולינום p ממעלה 2 הוא פריק אם ורק אם יש לו שני שורשים (שיכולים להיות שווים).

אם $p=gh$ פריק אז חייב להתקיים כי $\deg g=\deg h=1$. אבל אז יש ל־g שורש (יחיד) וגם ל־ h יש שורש אחד, ולכן ל־ p יש בדיוק שני שורשים.

להיפך, אם ל־p יש שורש, נסמן אותו ב־x_1 ונרשום (עפ"י מסקנה 1) $p(x)=(x-x_1)q(x)$, כלומר p פריק. (שימו לב שגם $\deg q=\deg p-1=1$.)

<u>מסקנה 3.</u> לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים ממשיים (שורש עם רבוי k נספר k פעמים).

טענה זו כבר הוצגה בתחילת הפרק, בסמוך למשפט היסודי של האלגברה, ונוכל כעת לנמק אותה. נסמן את השורשים הממשיים של p ב־ $x_1,\ldots,x_m$ כאשר m מספרים וחלקם אולי שווים. עפ"י מסקנה 1 קיים פולינום מנה q כך ש־

$$p(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_m)q(x) \,.$$

אם נשווה את מעלות האגפים נקבל $n=1+\cdots+1+\deg q=m+\deg q\geq m$, וזה מה שרצינו להסיק.

בהחלט ייתכן שמספר השורשים הממשיים של פולינום יהיה קטן ממעלתו; למשל ל־ x^2+3 אין כלל שורשים ממשיים.

<u>דוגמה:</u> $p(x)=x^3-x^2+x-1$. כאמור אין נוסחאות פשוטות עבור השורשים הממשיים של פולינום ממעלה 3 או כללים לקביעת מספרם, אבל במקרה זה ניתן לזהות בניסוי וטעייה את השורש $x_1=1$. חילוק ארוך של p ב־ $(x-1)$ יתן $p(x)=(x-1)(x^2+1)$. לפולינום (x^2+1) אין שורשים, ולכן יש לפולינום p שורש ממשי אחד בלבד למרות שמעלתו 3.

נסכם את שאלת הפריקות והשורשים עד כאן:

(i) כל פולינום ממעלה 1 הוא אי פריק ויש לו שורש ממשי אחד.

(ii) פולינום ממעלה 2 יכול להיות פריק (ואז יש לו שני שורשים ממשיים, שיכולים להיות שווים), או אי פריק (ואז אין לו שורשים ממשיים).

(iii) מספר a הוא שורש של פולינום p אם ורק אם p מתחלק ב־$(x-a)$.

מה ניתן לאמר לגבי הפריקות של פולינומים ממעלה 3 ומעלה?

<u>דוגמה:</u> $p(x) = x^4+1$. ברור שאין ל־ p שורשים כי הוא מקבל ערכים חיוביים בלבד ולכן איננו מתחלק בפולינום ממעלה 1. אבל, ע"י השלמה לריבוע נקבל כי

$$\begin{aligned} x^4+1 &= (x^4+2x^2+1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 \\ &= \big((x^2+1)-\sqrt{2}\,x\big)\,\big((x^2+1)+\sqrt{2}\,x\big) \\ &= (x^2-\sqrt{2}\,x+1)\,(x^2+\sqrt{2}\,x+1) \end{aligned}$$

ונסיק ש־ p פריק, מעלת שני גורמיו היא 2, והגורמים הם אי פריקים.

את המשפט הבא נצטט בלבד כי הוכחתו מתבססת על מספרים מרוכבים.

<u>משפט.</u> כל פולינום ממעלה 3 ומעלה הוא פריק.

כמו שכל מספר טבעי מתפרק למכפלה של מספרים ראשוניים, כך גם כל פולינום מתפרק למכפלה של פולינומים אי פריקים, והמשפט הקודם מבטיח שמעלת גורמים אי פריקים אלה היא 1 או 2. ליתר דיוק

<u>משפט.</u> ניתן לייצג כל פולינום p כמכפלה

$$p(x) = ap_1(x)\,p_2(x)\,\ldots\,p_m(x)$$

כאשר a ממשי ו־ $p_1, ..., p_m$ פולינומים ממעלה 1 או 2.

ההצגה הזו אינה יחידה, כי נוכל , למשל, להחליף את p_1 ב־ $7p_1$ ואת p_2 ב־ $\frac{1}{7}\,p_2$. אבל אם נניח שהמקדמים המובילים של כל הפולינומים $p_1, \ldots, p_m$ הם 1 אז ההצגה היא יחידה, חוץ משינוי סדר הגורמים.

נסיים עם שני תרגילים

<u>תרגיל 1.</u> מיצאו פולינום ממעלה 6 ששורשיו הממשים היחידים הם $0, 1, 2$ ושיש לו לפחות שורש אחד שאינו ממשי.

הדרכה: זכרו שאחד השורשים הממשיים יכול להיות עם ריבוי 2.

<u>תרגיל 2</u> יהי $p(x)$ פולינום ממעלה 2 לפחות. אם השארית של חלוקת p ב־ $(x+3)$ היא 6, וזו של חלוקת p ב־ $(x-3)$ היא 4 מהי השארית של חלוקת p ב־ (x^2-9) ?

הדרכה: כיתבו $p(x)=(x^2-9)q(x)+r(x)$. מהי המעלה של $r(x)$? הציבו כעת $x=\pm 3$ כדי לחשב את $r(x)$.